

schen Wert des magnetischen Moments auftreten. Es erhebt sich deshalb die Frage, ob nicht auch beim Elektron ein solcher „Feldbeitrag“ zum magnetischen Moment vorhanden ist. Das ist tatsächlich auf Grund der Quantenelektrodynamik zu erwarten, wie folgende Überlegung zeigt: Die Quantenelektrodynamik führt zu Abweichungen von den Maxwellschen Gleichungen, die anschaulich so erklärt werden können, daß in Gebieten großer Energiedichte des elektromagnetischen Feldes die Möglichkeit zur Bildung (virtueller) Elektron-Positron-Paare besteht. Bei der Bildung eines solchen Paares wird im allgemeinen der Drehimpuls dadurch gewahrt bleiben, daß beide Teilchen entgegengesetzten Spin haben. Dann liegen aber infolge der entgegengesetzten Ladungen ihre magnetischen Momente in der gleichen Richtung und geben eine nicht verschwindende Resultierende. Durch ein äußeres magnetisches Feld wird eine der beiden möglichen Einstellungsrichtungen energetisch bevorzugt, und man überlegt leicht, daß auf diese Weise ein Paramagnetismus des Vakuums zustande kommen muß. Ein Elektron ist also von einer solchen paramagnetischen Wolke umgeben, und diese wird durch das magnetische Moment des Elektrons polarisiert werden, so daß das Moment des Elektrons um diesen „Polarisationsanteil“ $\delta\mu$ erhöht erscheint.

Eine quantitative Durchführung dieser Rechnung würde zunächst durch die üblichen Divergenzschwierigkeiten erschwert werden. Die folgende Überlegung wird aber wohl ein Maß für die Größenordnung des zu erwartenden Effekts liefern.

Wir gehen aus von der Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen, die von Heisenberg und Euler¹ auf Grund der Diracschen Löchertheorie aufgestellt worden ist. Daraus ergibt sich insbesondere für den Zusammenhang zwischen \mathfrak{H} und \mathfrak{B} (unter Vernachlässigung der in \mathfrak{B} nichtlinearen Glieder)

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} + \frac{4\pi}{180\pi^2\alpha E_0^2} \{2\mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 - 7\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{B})\}. \quad (1)$$

Dabei ist $\alpha = 1/137$ die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante und $E_0 = m^2c^4/e^3$ die „Feldstärke am Rande des Elektrons“. Aus dieser Gleichung kann man sofort die magnetische Suszeptibilität des Vakuums ablesen, und für das induzierte Moment bekommt man

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{180\pi^2\alpha E_0^2} \{7\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{B}) - 2\mathfrak{B}\mathfrak{E}^2\}. \quad (2)$$

Allerdings gilt Gl. (2) nur für Felder, die räumlich und zeitlich langsam veränderlich sind, also sicher nicht in unmittelbarer Nähe des Elektrons. Trotzdem wird (2) wohl die richtige Größenordnung auch in unserem Falle liefern.

Setzt man für \mathfrak{E} und \mathfrak{B} das Feld einer Punktladung e bzw. eines magnetischen Dipols μ ein, so bekommt

¹ Euler, Ann. Physik **26**, 398 [1936]; Heisenberg u. Euler, Z. Physik **98**, 714 [1936]. Vgl. auch Wentzel, Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943, S. 190 (Druckfehler! Es muß dort \hbar statt h^3 heißen).

man für das Polarisationsmoment

$$\delta\mu = \int \mathfrak{M} dr.$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt

$$\frac{\delta\mu}{\mu} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{180\pi^2\alpha E_0^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{e^2}{r^5} dr. \quad (3)$$

Das Integral divergiert an der unteren Grenze. Man wird aber etwa die Größenordnung des wirklichen Effektes bekommen, wenn man nur bis zum „Elektronenradius“ $r_0 = e^2/mc^2$ integriert. Dann ergibt sich

$$\frac{\delta\mu}{\mu} = \frac{1}{3 \cdot 180 \pi \alpha \cdot \pi} = 0,08. \quad (4)$$

Demnach wäre $\delta\mu$ gleich 8% des Bohrschen Magneton. Dieser Wert ist etwa 80-mal größer als der tatsächlich von Rabi gemessene. Eine bessere Übereinstimmung wäre bei der oben benutzten sehr groben Abschneidevorschrift reiner Zufall gewesen. Der Wert des Integrals in (3) ist nämlich der vierten Potenz der unteren Grenze proportional, so daß ein Faktor von der Größenordnung 1 bei der Wahl von r_1 schon zwei Zehnerpotenzen bei $\delta\mu$ ausmachen kann. Das hängt damit zusammen, daß der größte Beitrag zu $\delta\mu$ gerade von den Gebieten kommt, in denen (1) schon keine brauchbare Näherung mehr ist. Vielleicht können später die verfeinerten Abschneidevorschriften, die sich in der jüngsten Zeit bei der Quantenelektrodynamik bewährt und zur verbesserten Deutung der Wasserstoff-Feinstruktur geführt haben, auch den Wert des magnetischen Elektronenmoments befriedigend deuten².

Aus (1) ergibt sich übrigens, daß die Suszeptibilität des Vakuums Tensorcharakter hat und von der gegenseitigen Orientierung von \mathfrak{B} und \mathfrak{E} abhängt. Daraus folgt, daß das Elektron auch ein magnetisches Quadrupolmoment besitzen muß.

² Anm. bei der Korr.: Wie aus einer inzwischen zugänglich gewordenen Notiz in Physic. Rev. **73**, 416 [1948] hervorgeht, ist eine derartige Rechnung bereits von J. Schwinger mit ausgezeichnetem Erfolg durchgeführt worden. Demgegenüber dürfte der Sinn der vorliegenden Notiz in einer anschaulichen Deutung des Effektes zu sehen sein.

Über magnetische Zylinderlinsen mit korrigiertem Bildfehler

Von Heinrich Hintenberger

Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, Tailfingen

(Z. Naturforschg. **3a**, 125–127 [1948]; eingeg. am 8. Januar 1948)

Die Wirksamkeit geradlinig begrenzter, homogener magnetischer Felder als Zylinderlinsen für Ionen und Elektronen wurde mehrfach untersucht¹ und ange-

¹ W. E. Stephens, Physic. Rev. **45**, 513 [1934]; R. Herzog, Z. Physik **89**, 447 [1934]; L. Cartan, J. Physique Radium **8**, 453 [1937].



wendet². Es handelt sich dabei stets um eine Fokussierung erster Ordnung, d.h. die von einem Punkt ausgehenden Strahlen werden in einem Bild vereinigt, dessen Ausdehnung bei Abbildung durch ein schmales Strahlenbündel der Winkelweite α in erster Näherung von α verschwindet. Versuche, die Bildfehler dabei herabzudrücken, sind in der Literatur nur wenige zu finden³. Eine Fokussierungsmöglichkeit zweiter Ordnung, bei der die Ausdehnung des Bildes eines Punktes auch in zweiter Näherung von α Null wird, hat neuerdings Bainbridge⁴ angegeben, der bei senkrechtem Ein- und Austritt kreisförmige Pol-

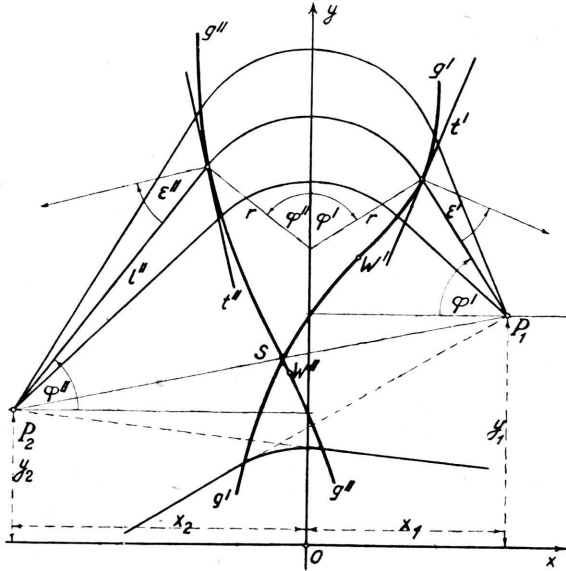


Abb. 1. Ein homogenes Magnetfeld sammelt Strahlen, die aus P_1 kommen, exakt in P_2 , wenn die Feldgrenzen g_1 und g_2 durch die Gl.

$$y - y_1 = \frac{x(x_1 - x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{und} \quad y - y_2 = \frac{x(x_2 - x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

gegeben sind.

schuhgrenzen von passendem Krümmungsradius benutzt.

Durch geeignete Wahl der Form der Polschuhe ist es möglich, eine exakte Fokussierung zu erreichen. Wählen wir ein homogenes Magnetfeld im positiven x -Raum so, daß es auf der einen Seite durch die y -Achse, auf der anderen durch die Kurve g' in Abb. 1 mit

$$y - y_1 = \frac{x(x_1 - x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (1)$$

(r = Bahnradius im Magnetfeld)

² J. Mattauach u. R. Herzog, Z. Physik **89**, 786 [1934]; zusammenfassend: J. Mattauach, Ergebn. exakt. Naturwiss. **19**, 171 [1940].

³ W. R. Smythe u. Rumbaugh, Physic. Rev. **45**, 724 [1934]; H. Voges u. G. Ruthemann, Z. Physik **114**, 709 [1939]; B. F. Shull u. D. M. Denison, Physic. Rev. **71**, 681 [1947].

begrenzt wird, so läßt sich zeigen, daß alle Strahlen, die parallel zur x -Achse in positiver Richtung mit $y \geq y_1$ ins Feld kommen, durch den Punkt P_1 (x_1, y_1) gehen. Wenn wir ein ähnliches Feld ungefähr spiegelbildlich zur y -Achse so wählen (Kurve g'' in Abb. 1), daß Strahlen, die parallel zur x -Achse in negativer Richtung ins Feld kommen, im Punkt P_2 (x_2, y_2) (x_2 = negativ) fokussiert werden, so erreichen wir durch die Kombination beider Felder, daß alle Strahlen, die aus P_1 kommen, exakt in P_2 fokussiert werden und umgekehrt.

Die Kurve (1) hat an der Stelle

$$x_w = \frac{3x_1 - \sqrt{9x_1^2 - 8r^2}}{2} \quad (2)$$

einen Wendepunkt. Für ihren Krümmungsradius erhält man:

$$\rho = \frac{r \sqrt{[r^2(r^2 + x_1^2) - 4r^2 x_1 + r^2 x^2 - 2x^3 x_1 - x^4]^3}}{(r^2 - x^2)(x^2 - 3x_1 x + 2r^2)} \quad (3)$$

Wir können aus der Feldbegrenzung für exakte Fokussierung leicht Bedingungen für eine Fokussierung beliebig hoher Ordnung ableiten, indem wir die Kurven vom Typus (1) auf der Ein- und Austrittsseite in der Nähe des Ein- und Austrittspunktes des Mittelstrahles durch Näherungskurven ersetzen, die sich beliebig eng an die Feldgrenzen für exakte Fokussierung anschließen.

Wählen wir als Näherungskurven die Tangenten, so erhalten wir eine Fokussierung erster Ordnung, und aus der ersten Ableitung der Gl. (1) lassen sich für Objekt und Bildentfernung l' und l'' , Ein- und Austrittswinkel ϵ' , ϵ'' und Ablenkungswinkel $\Phi = \varphi' + \varphi''$ die Beziehungen ableiten:

$$\frac{l'}{r} = \frac{\cos \varphi'}{\sin(\varphi' - \epsilon')} \cos \epsilon',$$

$$\frac{l''}{r} = \frac{\cos \varphi''}{\sin(\varphi'' - \epsilon'')} \cos \epsilon''. \quad (4)$$

Daraus folgt unmittelbar die Cartansche⁴ Bildkonstruktion und für $\epsilon' = \epsilon'' = 0$ die bekannte Tatsache, daß bei senkrechtem Ein- und Austritt Gegenstand, Bild und Bahnmittelpunkt auf einer Geraden liegen.

Sorgen wir dafür, daß die Feldgrenzen zu Wendetangenten werden, so tritt Fokussierung zweiter Ordnung ein und es lassen sich dafür aus (2) die Beziehungen ableiten

$$\frac{l'}{r} = \frac{2}{3} \cot \varphi', \quad \frac{l''}{r} = \frac{2}{3} \cot \varphi'', \quad (5)$$

⁴ K. T. Bainbridge, 7th Solvay Congress in Chemistry, 21.—28. Sept. 1947. Ich danke Hrn. Prof. Mattauach, der mir den Einblick in das Manuskript des Vortrages von Hrn. Prof. Bainbridge ermöglichte.

die mit (4) nur für bestimmte Ein- und Austrittswinkel verträglich sind, für die

$$\operatorname{tg} \varepsilon' = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi', \quad \operatorname{tg} \varepsilon'' = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi'' \quad (5 \varepsilon)$$

ist. Fokussierung zweiter Ordnung tritt auch ein, wenn als Feldgrenzen Krümmungskreise an (1) im Ein- und Austrittspunkt gewählt werden. Für den Krümmungsradius q' an der Eintrittsseite erhält man aus (3), wenn x und x_1 durch l' , φ' und ε' ausgedrückt werden (Abb. 1),

$$q' = r \frac{\sqrt{\left[\cos^2 \varphi' - 2 \frac{l'}{r} \sin \varphi' \cos \varphi' + \frac{l'^2}{r^2} \right]^3}}{\cos^2 \varphi' \left[2 \cos \varphi' - 3 \frac{l'}{r} \sin \varphi' \right]} \quad (6)$$

$$= r \frac{\left(\frac{l'}{r} \right)^3}{\cos^2 \varepsilon' \left(\cos \varepsilon' + 3 \frac{l'}{r} \sin \varepsilon' \right)}.$$

Die gleiche Formel gibt auch den Krümmungsradius q'' an der Austrittsstelle, wenn man l' , φ' und ε' durch l'' , φ'' und ε'' ersetzt.

Es folgen daraus auch die Beziehungen (5), wenn wir q unendlich werden lassen, und mit Hilfe von (4) die von Bainbridge angegebene Beziehung

$$q = r \cot^2 \frac{\phi}{2} \quad \left(\frac{\phi}{2} = \varphi' = \varphi''; \varepsilon' = \varepsilon'' = 0 \right)$$

für senkrechten Ein- und Austritt schmaler Strahlenbündel bei symmetrischer Abbildung.

Wie bei anderer Gelegenheit gezeigt werden wird, können die hier angegebenen Formeln für q noch verallgemeinert werden.

Anwendungsmöglichkeiten der abgeleiteten Resultate ergeben sich insbesondere beim Bau von Massenspektrometern mit sektorförmigem Magnetfeld.

Zur Isotopenanreicherung durch elektrolytische Überführung in wäßrigen Lösungen

Von Alfred Klemm

Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, Tailfingen

(Z. Naturforschg. 3a, 127–128 [1948]; eingeg. am 10. Januar 1948)

Während des Krieges sind erstmals Versuche in USA erfolgreich gewesen, Isotopenhäufigkeitsverhältnisse durch Ionenwanderung in wäßrigen Lösungen zu verschieben^{1,2}. Das Verhältnis der Translationsgeschwindigkeiten relativ zum Wasser wurde beim Kalium unabhängig vom Anion (Cl^- oder SO_4^{2-}) und unabhängig von der Konzentration (Molverhältnis

¹ A. K. Brewer, S. L. Madorsky, J. K. Taylor, V. H. Dibeler, P. Bradt, O. L. Parham, R. J. Britten u. J. G. Reid, J. Res. nat. Bur. Standards 38, 137 [1947].

$\text{KCl}/\text{H}_2\text{O} = 1/25$ bis $1/120$) zu $^{39}\text{w}/^{41}\text{w} = 1,003_{85}$ und beim Chlor ($\text{NaCl}/\text{H}_2\text{O} = 1/30$) zu $^{35}\text{w}/^{37}\text{w} = 1,002_{07}$ gefunden.

Nachdem diese Zahlen bekannt sind, scheint es, daß bei den früheren Wanderungsversuchen von Kendall, Pilley und anderen die Atomgewichtsbestimmung ungenauer, oder die Vervielfachung infolge unzulänglicher Verhütung der Rückmischung kleiner gewesen ist, als ich aus den Literaturangaben abgeschätzt hatte³; sonst hätten auch die früheren Autoren Anreicherungen finden müssen.

Als allgemein denkbare Ursachen für den Isotopenunterschied der elektrolytischen Transportgeschwindigkeiten geben die amerikanischen Autoren an¹:

1. Unterschied der Wanderungsgeschwindigkeiten von gleichstark hydratisierten Ionen,
2. Unterschied der Hydratation der Ionen,
3. Isotopieeffekt zwischen Ionen und undissoziierten Molekülen.

Als Hinweis für den zweiten Effekt wird angeführt, daß Zeolithe ^{41}K fester als ^{39}K binden⁴, und als Beispiel für den dritten Effekt wird die Isotopenverschiebung zwischen CO_3^{2-} und CO_2 genannt. Für Kaliumsalze wird der dritte Effekt wegen des hohen Dissoziationsgrades als nicht verantwortlich angesehen. Auf Grund des ersten Effektes allein wird geschätzt $^{39}\text{w}/^{41}\text{w} = \sqrt{^{41}\text{K} \cdot 7\text{H}_2\text{O} / ^{39}\text{K} \cdot 7\text{H}_2\text{O}} = 1,006$.

Im folgenden wollen wir eine Formel ableiten, die den Zusammenhang zwischen dem Elementareffekt q (oder ε) = $i\text{w}/k\text{w}$ und der Größe jener unter 1 bis 3 angeführten Primäreffekte angibt.

Ein Elektrolyt enthalte ein Element mit einigen Isotopen, die wir durch Indices links oben unterscheiden. Das Element komme in verschiedenen Zuständen vor, etwa als unhydratisiertes Ion, als einfach, zweifach usw. hydratisiertes Ion und als Partner in einem Molekül. Diese Zustände des Elements kennzeichnen wir durch Indices rechts unten. Konzentrationen bezeichnen wir mit c . Ferner führen wir folgende Molenbrüche ein:

$$\Gamma_s = c_s/c; \quad i\gamma_s = i c_s/c_s.$$

Dabei gilt

$$\sum_s \Gamma_s = 1; \quad \sum_i i\gamma_s = 1.$$

Wenn sich nun der homogene Elektrolyt in einem homogenen äußeren Feld befindet, so mögen je nach Zustand und Isotop verschiedene Transportgeschwindigkeiten $i\text{w}_s$ [cm/sec] auftreten. Im Mittel wird dann das Isotop i mit der Geschwindigkeit

$$i\text{w} = \sum_s \Gamma_s i\gamma_s i\text{w}_s / \sum_s \Gamma_s i\gamma_s$$

² J. W. Westhaver, ebenda 38, 169 [1947]; S. L. Madorsky u. S. Straus, ebenda 38, 185 [1947].

³ A. Klemm, Z. Naturforschg. 2a, 9 [1947].

⁴ T. J. Taylor u. H. C. Urey, J. chem. Physics 6, 429 [1938]; A. K. Brewer, Ind. Engng. Chem. 61, 1597 [1939].